第 4 講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式

例題

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第５項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(ii)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

Point Pickup

練習

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i) $a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　(ii) $a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

第 4 講　PART1 確認問題

1　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において

$$a_2=\boxed{\text{ア}},\quad a_3=\boxed{\text{イ}},\quad a_4=\boxed{\text{ウエ}}$$

である。

2　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+5$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}$$

である。

3　$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{キ}}\cdot\left(\boxed{\text{クケ}}\right)^{n-1}$$

である。

第 4 講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式

例題

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第５項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(ⅰ)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(ⅱ)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

(1)　$a_2=4a_1-2=4\cdot1-2=2$　　$a_3=4a_2-2=4\cdot2-2=6$

$a_4=4a_3-2=4\cdot6-2=22$

よって　$a_5=4a_4-2=4\cdot22-2=86$

(2)(ⅰ)　数列 $\{a_n\}$ は初項２，公差４の等差数列である。

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$

(ⅱ)　数列 $\{a_n\}$ は初項５，公比３の等比数列である。

よって　$a_n=5\cdot3^{n-1}$

練習

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　(ii)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

(1)　$a_2=2a_1+1=2\cdot2+1=5$　　$a_3=2a_2+2=2\cdot5+2=12$

$a_4=2a_3+3=2\cdot12+3=27$

よって　$a_5=2a_4+4=2\cdot27+4=58$

(2) (i)　数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 -3 の等差数列である。

よって　$a_n=4+(n-1)\cdot(-3)=-3n+7$

(ii)　数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：6，ウエ：15

[解説]

$a_2=1+1^2=\mathbf{2}$ [A]

$a_3=2+2^2=\mathbf{6}$

$a_4=6+3^2=\mathbf{15}$

[A]　漸化式に $n=1,\ 2,\ 3$ を順に代入する。

2

[正解] オ：5，カ：2

[解説]

$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+5$ [B]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 3，公差 5 の等差数列であるから

$a_n=3+(n-1)\cdot 5$ [C]

$\quad=\mathbf{5n-2}$

[B]　$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公差 d の等差数列

[C]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は
$a_n=a+(n-1)d$

3

[正解] キ：2，クケ：−3

[解説]

$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$ [D]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 2，公比 −3 の等比数列であるから

$\boldsymbol{a_n=2\cdot(-3)^{n-1}}$ [E]

[D]　$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公比 r の等比数列

[E]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は
$a_n=ar^{n-1}$